

2024年

東大数学

文系第4問

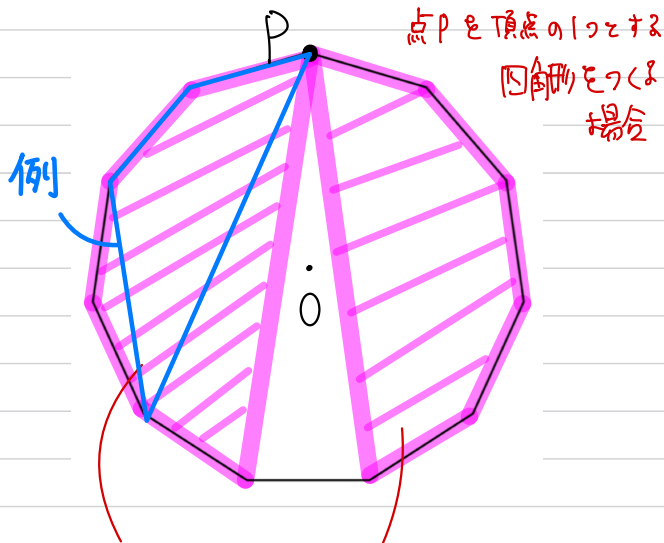
・四角形の選び方は、 n 個の頂点のうち4つを選ぶので、 nC_4 通り

・ $n=5$ の場合 どのように点をとっても必ず点 O を含む。よって確率は1

・ $n \geq 7$ で、点 O を含まない場合が生じる。

余事象の、「 O を内部に含まない四角形」を考える。

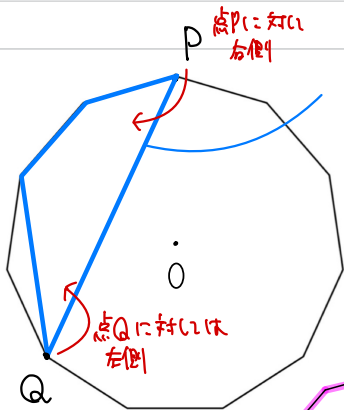
たとえば四角形を描いてみて、 O の領域に四角形を描けばよいことがわかる



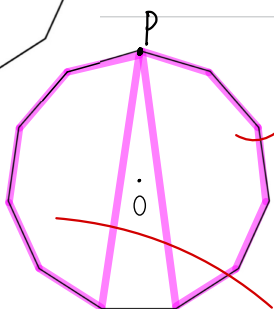
このとき、 O の領域内で4点とれば、内部に O を含まない。

・点 P の選び方は n 通り。

しかし、点 P に対して、両側の領域から他の頂点を選ぶようにすると、重複が生じるので、片側だけで考える。

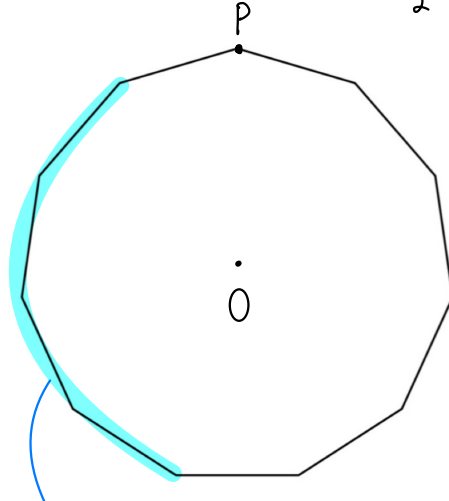


この四角形は、
点 P のときの右側の領域
点 Q のときの左側の領域
数えあげることにする。

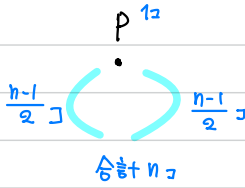


こっちも数え
と重複するので数えない。
こっちだけ数える

・他の3つの頂点の選び方は $\frac{n-1}{2}$ 通り



ここにあり頂点は $\frac{n-1}{2}$ 個



$\frac{n-1}{2}$ 個の頂点のうち3個を選べばよいので、

$\frac{n-1}{2} C_3$ 通り

これは余事象

よって、点 O を含まない四角形は $n \times \frac{n-1}{2} C_3$ 通り

点 O を含む四角形は $nC_4 - n \times \frac{n-1}{2} C_3$ 通り

求める確率は、 $\frac{nC_4 - n \times \frac{n-1}{2} C_3}{nC_4}$ あとは計算!!

$$nC_4 = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$n \times \frac{n-1}{2} C_3 = n \times \frac{\frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-5}{2}}{3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{48} n(n-1)(n-3)(n-5)$$

$$\frac{nC_4 - n \times \frac{n-1}{2} C_3}{nC_4} = \frac{\frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3) - \frac{1}{48} n(n-1)(n-3)(n-5)}{\frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$= \frac{2(n-2) - (n-5)}{2(n-2)} = \frac{n+1}{2(n-2)} \quad \leftarrow n \geq 7 \text{ の計算結果}$$

$n=5$ を代入してみよう。

$$\frac{5+1}{2(5-2)} = 1 \quad \text{と一致する。} \quad n=5 \text{ でも成立。}$$

$$\text{よって } n \geq 5 \text{ のすべての奇数で } \frac{n+1}{2(n-2)}$$